Der Satz des PYTHAGORAS

Mathematik ist schön^1
Mathematik ist schön^2
Mathematik ist schön^4

Herrn PROF. DR. PETER GALLIN, Bauma/Zürich, zum 70. Geburtstag gewidmet!

Der vielleicht berühmteste Satz der Geometrie trägt den Namen des griechischen Mathematikers PYTHAGORAS VON SAMOS, der im 6. Jahrhundert v. Chr. lebte:

- Wenn in einem Dreieck der Winkel γ ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten a, b und der Hypotenuse c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$.

Es gilt aber auch die Umkehrung des Satzes:

- Wenn für die Seitenlängen von a, b, c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist der Winkel γ ein rechter Winkel.

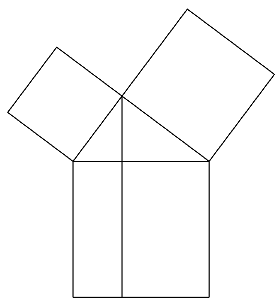
Dabei bezeichnen wir – wie üblich – die Eckpunkte des Dreiecks mit A, B, C (im Gegenuhrzeigersinn), die anliegenden Innenwinkel mit α, β, γ und die jeweils gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks mit a, b, c.

Es ist nicht bekannt, ob PYTHAGORAS oder seine Schüler, die Pythagoreer, eine Begründung oder gar einen Beweis für die Gültigkeit des Satzes gekannt haben. Die ersten beiden dokumentierten Beweise findet man in den *Elementen* des EUKLID (Buch I, Satz 47 und Satz 48, sowie Buch VI, Satz 31). Eine hervorragende Übersetzung des Werks durch DR. RUDOLPH HALLER findet man im Internet unter

- http://www.opera-platonis.de/euklid/

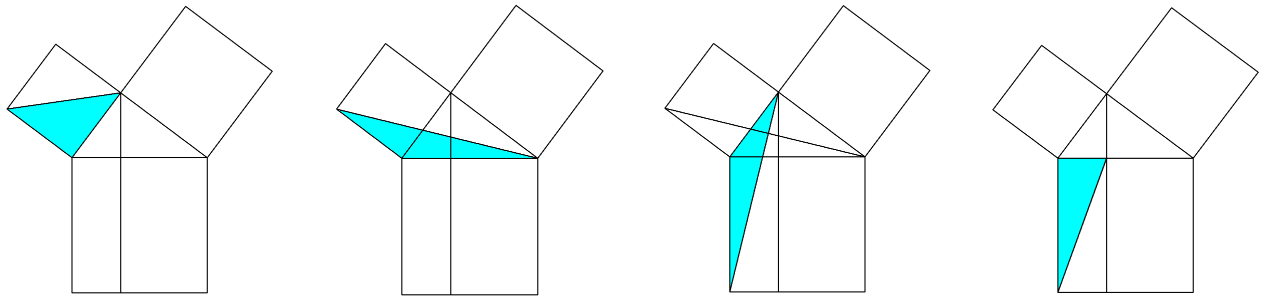
Der erste Beweis des Satzes benutzt die Eigenschaft, dass zwei Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen (*Elemente* I, 38):

- *Dreiecke, die auf gleichen Grundseiten derselben Geraden errichtet sind und zwischen denselben Parallelen liegen, sind gleich.*

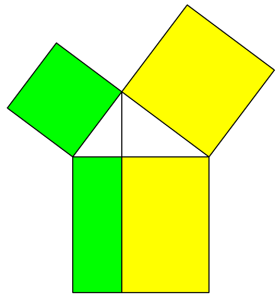


Zum Beweis: Man unterteilt zunächst die gesamte Figur durch ein verlängertes Lot vom Punkt C auf die Seite c, siehe Abb. rechts.

Dann halbiert man eines der Kathetenquadrate durch eine Diagonale, siehe erste Abbildung unten links, und färbt eines der beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke. Dieses halbe Kathetenquadrat ist gemäß Elemente I, 38 flächengleich zu dem stumpfwinkligen Dreieck in der zweiten Abbildung. Durch Drehung dieses Dreiecks um 90° (im Uhrzeigersinn) erhält man ein hierzu kongruentes Dreieck in der dritten Abbildung, und schließlich in der vierten Abbildung ein dazu flächengleiches rechtwinkliges Dreieck, die Hälfte des Rechtecks, das unterhalb des geteilten Kathetenquadrates liegt.



Damit ist bewiesen, dass das halbe Kathetenquadrat und das zugehörige halbe Rechteck den gleichen Flächeninhalt haben, also auch das Kathetenquadrat selbst und das zugehörige Rechteck.



Analog ist der Beweis für das andere Kathetenquadrat zu führen.

Bezeichnet man die beiden kürzeren Seiten der Rechtecke, die Abschnitte der Hypotenuse, wie üblich mit q (senkrechte Projektion von b auf c) bzw. mit p (senkrechte Projektion von a auf c), dann lässt sich das Zwischenergebnis als **Kathetensatz des EUKLID** formulieren:

- Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, das aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse gebildet wird:
  $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.

Diesen Satz wendet man nun an, um den Beweis des Satzes von PYTHAGORAS abzuschließen:

$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c \cdot c = c^2$

Der Beweis der Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS erfolgt an späterer Stelle.

Die Umkehrung des Satzes wird oft vergessen, wenn der Satz zitiert wird. Er ist aber in der Anwendung mindestens ebenso wichtig wie der Satz selbst. Allein aus der Kenntnis der Seitenlängen eines Dreiecks kann man erschließen, was für ein Dreieck (spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig) vorliegt.

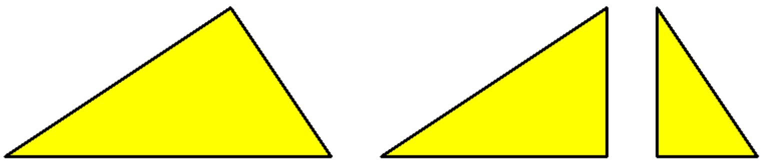
Für welche ganzzahligen Zahlentripel (a, b, c) die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist (PYTHAGOREische Zahlentripel), ist im Beitrag „Muster aus bunten Steinen“ (08/2015) ausgeführt.

➢ Beweis des Satzes von PYTHAGORAS mithilfe ähnlicher Dreiecke

Buch VI der *Elemente* beschäftigt sich mit Proportionen in der Geometrie. Hierauf beruht ein zweiter Beweis des Satzes von PYTHAGORAS. Satz VI, 8 untersucht die oben betrachtete Teilung des rechtwinkligen Dreiecks durch die Höhe h_c:

- *Wird im rechtwinkligen Dreieck vom Punkt des rechten Winkels die Senkrechte auf der Grundlinie errichtet, dann sind beide an der Senkrechten liegende Dreiecke einander und dem ganzen Dreieck ähnlich.*

d. h., zeichnet man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe h_c ein, dann entstehen zwei rechtwinklige Teildreiecke, die zum ursprünglichen Dreieck ähnlich sind:



Daher gilt folgende umfassende Verhältnisgleichung für die Seitenlängen der drei rechtwinkligen Dreiecke:

(kürzere) Kathete : (längere Kathete) : Hypotenuse =

a : b : c	=	h : q : b	=	p : h : a
großes Dreieck		Teildreieck links		Teildreieck rechts

In dieser mehrfachen Verhältnisgleichung sind neun einzelne Verhältnisgleichungen enthalten, die sich auch in Produktform notieren lassen:

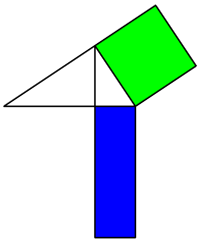
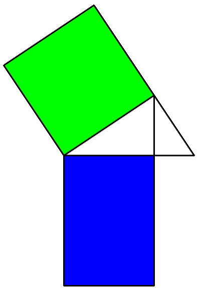
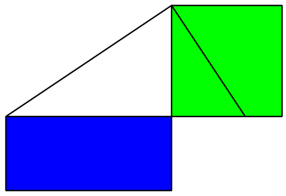
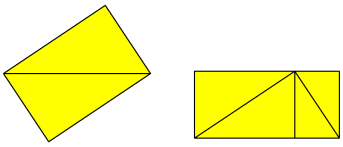
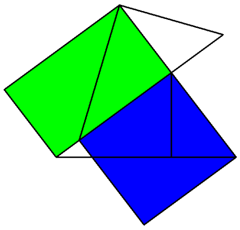
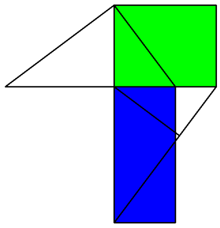
(1) $a : b = h : q \Leftrightarrow a \cdot q = b \cdot h$	(4) $a : c = h : b \Leftrightarrow a \cdot b = c \cdot h$	(7) $b : c = q : b \Leftrightarrow b^2 = c \cdot q$
(2) $a : b = p : h \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot p$	(5) $a : c = p : a \Leftrightarrow a^2 = c \cdot p$	(8) $b : c = h : a \Leftrightarrow a \cdot b = c \cdot h$
(3) $h : q = p : h \Leftrightarrow h^2 = p \cdot q$	(6) $h : b = p : a \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot p$	(9) $q : b = h : a \Leftrightarrow a \cdot q = b \cdot h$

Die Aussagen (5) und (7) entsprechen den beiden Kathetensätzen, aus denen – wie oben erläutert – die Aussage des Satzes von Pythagoras folgt.

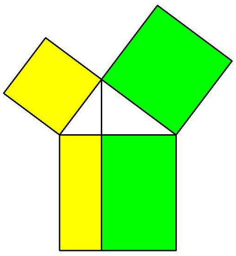
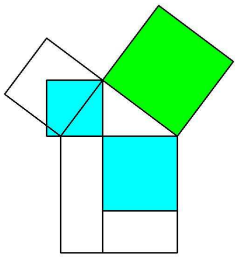
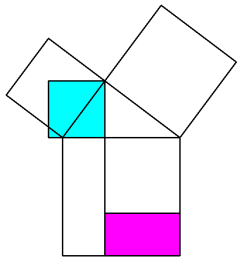
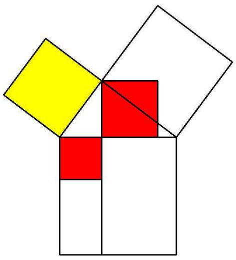
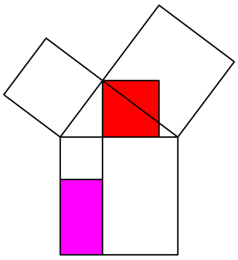
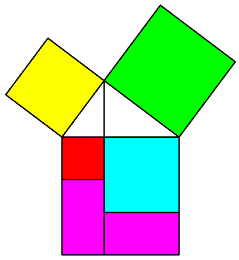
Aussage (3) ist der sogenannte **Höhensatz des Euklid** (vgl. auch Satz II, 14 der *Elemente*):

- *Das Quadrat über der (Hypotenusen-)Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.*

Die Aussagen (4) = (8) enthalten die beiden Möglichkeiten, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen. Die Aussagen (1) = (9) sowie (2) = (6) geben Beziehungen an, die i. A. nicht von Bedeutung sind.

$a^2 = c \cdot p$ (Kathetensatz bzgl. a) 	$b^2 = c \cdot q$ (Kathetensatz bzgl. b) 	$h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz des Euklid) 
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ (Flächeninhalt des Dreiecks) 	$a \cdot q = b \cdot h$ 	$a \cdot h = b \cdot p$ 

- **Variationen zum Satz des Pythagoras**

 Kathetensatz: grün = grün: $a^2 = c \cdot p$ gelb = gelb: $b^2 = c \cdot q$	 Satz von Pythagoras für das rechte Teildreieck: grün = türkis: $a^2 = h^2 + p^2$	 Folgerung für das Höhenquadrat: türkis = pink: $h^2 = p \cdot q$
 Satz von Pythagoras für das linke Teildreieck: gelb = rot: $b^2 = h^2 + q^2$	 Folgerung für das Höhenquadrat: rot = pink: $h^2 = p \cdot q$	 gelb + grün = rot + türkis + 2·pink: $a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2$ $= (p + q)^2 = c^2$

• „Schöne“ Beweise des Satzes von PYTHAGORAS

Es gibt weit über 100 Beweise des Satzes von PYTHAGORAS – welcher Beweis ist der schönste?

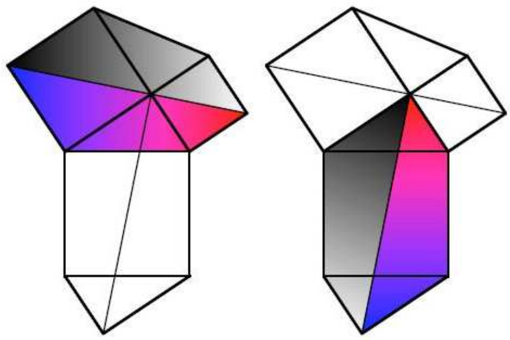
Was schön ist, muss jeder für sich selbst entscheiden. Ein Kriterium könnte sein: Man schaut einfach nur hin und sieht sofort und ohne Rechnung, dass die Kathetenquadrate zusammen so groß sind wie das Hypotenusenquadrat.

• Beweis von LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519)

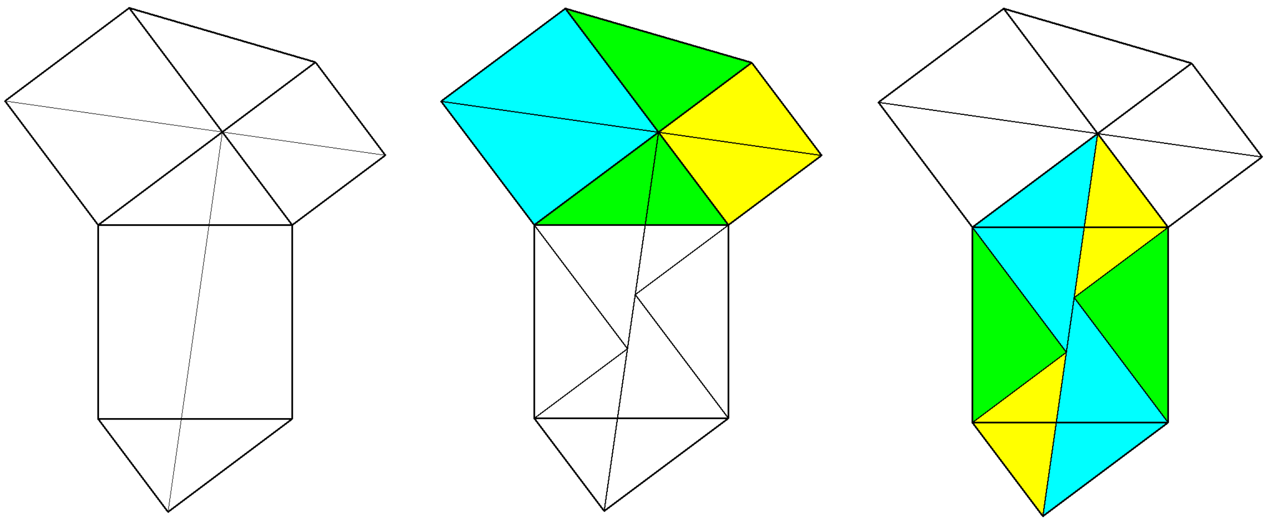
Dieses Kriterium erfüllt mit Sicherheit der Beweis, den LEONARDO DA VINCI gefunden haben soll:

Man ergänze die PYTHAGORAS-Figur oben und unten jeweils um das gegebene rechtwinklige Dreieck. Oben entsteht dann ein achsensymmetrisches, unten ein punktsymmetrisches Sechseck. Durch die eingezeichneten Hilfslinien sind die zueinander kongruenten Teilfiguren leicht erkennbar.

Die Abbildung rechts zeigt eine Grafik, die PETER GALLIN erstellt hat. Ist der so geführte Beweis nicht wunderschön?



Wer die einzelnen Teilflächen der beiden Sechsecke einander zuordnen möchte, beachte die folgenden Abbildungen:

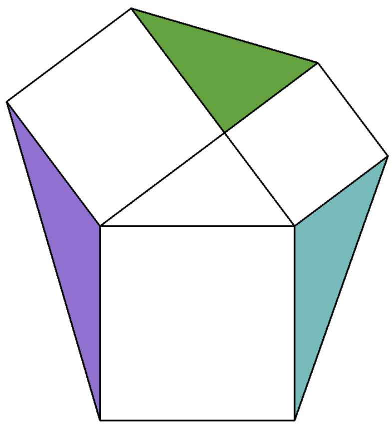


• Ergänzung: Knobelaufgabe zur PYTHAGORAS-Figur

In der Abbildung ist die PYTHAGORAS-Figur durch die drei gefärbten Dreiecke ergänzt.

Dann gilt:

– Die drei gefärbten Dreiecke haben jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Ausgangsdreieck.



– Bezeichnet man die jeweils längsten Seiten der gefärbten Dreiecke mit x, y, z, dann gilt:

$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

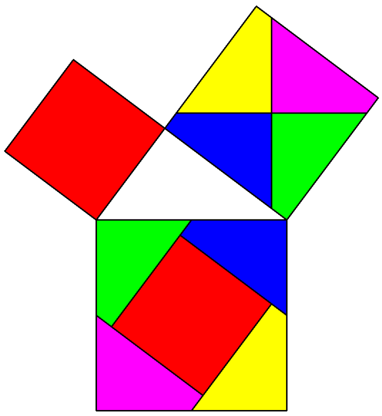
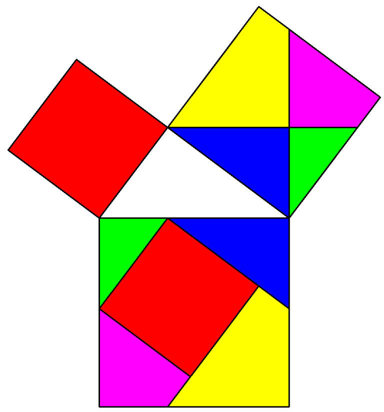
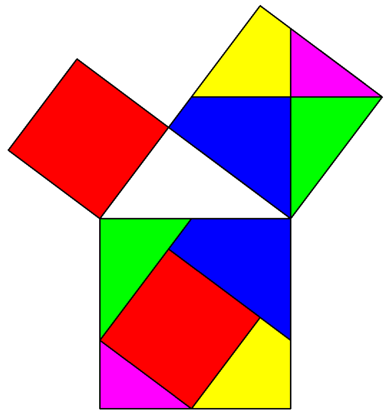
– Diese beiden Eigenschaften gelten sogar für beliebige Dreiecke, über deren Seiten Quadrate errichtet sind.

Hinweis: Fortsetzung Seite 19

- **Zerlegungsbeweise**

Schön sind sicherlich auch die Puzzle-Beweise des Satzes von PYTHAGORAS. Hierbei werden die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks derart in Teilfiguren zerlegt, dass man mit den Puzzlestücken sowohl die beiden Kathetenquadrate als auch das Hypotenusenquadrat ausfüllen kann.

- **Ein Zerlegungsbeweis von HENRY PERIGAL (1801 – 1898)**

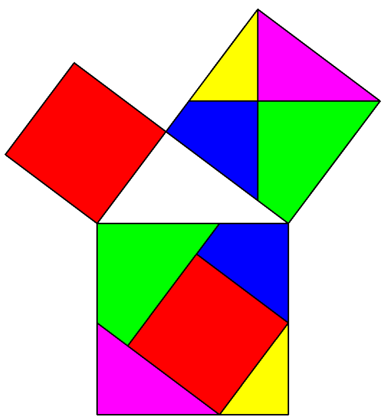
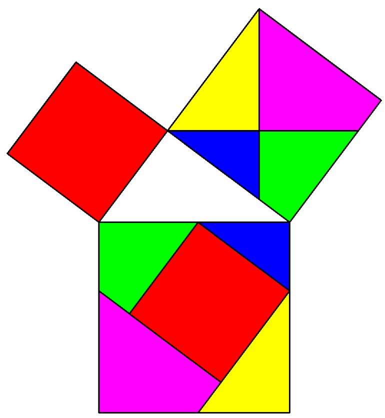
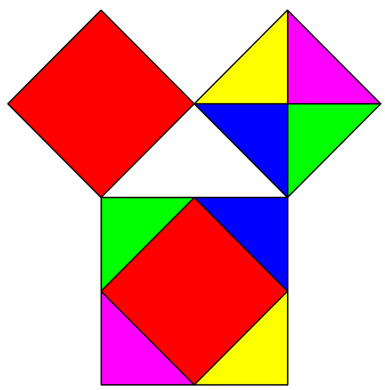
Der von französischen Hugenotten abstammende englische Hobby-Mathematiker HENRY PERIGAL fand in seiner Freizeit – er war Bankangestellter – eine Methode für eine unendlich große Anzahl von möglichen Zerlegungen, die mit nur fünf Puzzlestücken auskommt. (Übrigens war er von seiner Entdeckung so begeistert, dass er die symmetrische Figur der Abbildung links auf seinen Grabstein meißeln ließ.)

Das kleinere der beiden Kathetenquadrate bleibt bei diesem Zerlegungsbeweis ungeteilt, d. h., es wird vollständig als Puzzleteil für die Zerlegung des Hypotenusenquadrats übernommen. Für die Zerlegung des größeren Kathetenquadrats gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Die Zerlegung erfolgt durch eine horizontale und eine vertikale Linie, die jeweils zwischen den einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Kathetenquadrats verlaufen muss. Für die Umlegung der Puzzlestücke von Kathetenquadrat in das Hypotenusenquadrat (und umgekehrt) ist nur eine Verschiebung erforderlich (d. h., es besteht keine Notwendigkeit, die Puzzlestücke zu drehen).

Die horizontale und die vertikale Linie sind jeweils so lang wie die Hypotenuse.

In der ersten Abbildung ist eine symmetrische Lage gewählt, die dazu führt, dass die vier Puzzlestücke des Kathetenquadrats zueinander kongruent sind. Die anderen Zerlegungen stellen jeweils extreme Lagen der horizonzalen bzw. vertikalen Linie dar. Bei diesen vier extremen Lagen könnte man das Ausgangsdreieck auf zwei Arten mit zwei der vier Puzzleteile auslegen.

Die letzte Abbildung (unten rechts) zeigt den Sonderfall eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks – beide Kathetenquadrate sind gleich groß. Hier gibt es nur eine Möglichkeit der Zerlegung: Eines der beiden Kathetenquadrate wird durch die Diagonalen in vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke unterteilt.

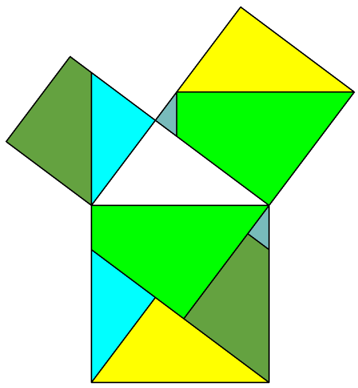
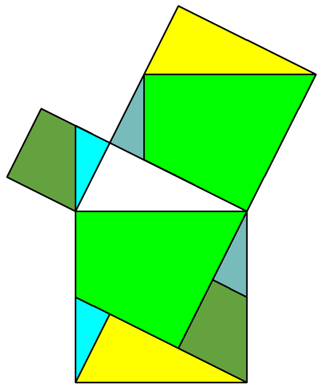
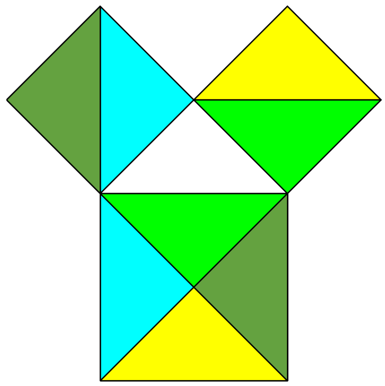
- **Ein Zerlegungsbeweis von ADOLPH GÖPEL (1812 – 1847)**

Der Zerlegungsbeweis des deutschen Mathematikers GÖPEL kommt ebenfalls mit fünf Puzzlestücken aus, die (ohne die Puzzlestücke zu drehen), von den Kathetenquadraten in das Hypotenusenquadrat verschoben werden können (und umgekehrt).

Das kleinere Kathetenquadrat wird durch Verlängerung einer vertikalen Seite des Hypotenusenquadrats in zwei Teile zerlegt. Die Unterteilung des größeren Kathetenquadrats erfolgt durch eine horizontale und eine vertikale Linie in drei Puzzlestücke. (Man könnte das größere Kathetenquadrat durch Verlängerung der anderen vertikalen Seite des Hypotenusenquadrats unterteilen; dann müssten aber Puzzlestücke beim Verschieben auch gedreht werden.)

Das gelb gefärbte Puzzlestück ist so groß wie das gegebene rechtwinklige Dreieck, das grau-blau gefärbte Puzzlestück und das türkis gefärbte Puzzlestück sind jeweils ähnlich zum Ausgangsdreieck, d. h., deren Seitenlängen ergeben sich aus einfachen Verhältnisgleichungen.

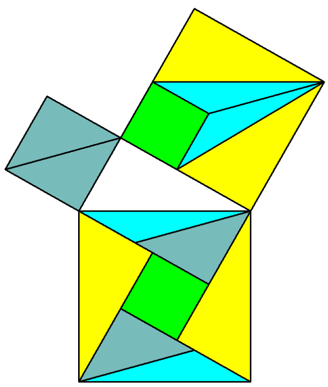
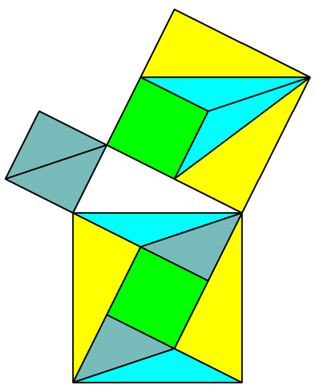
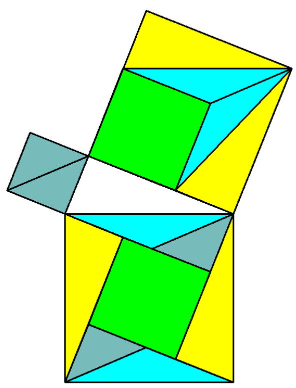
Die Abbildung links zeigt die Zerlegung für a : b = 4 : 3, die mittlere Abbildung für a = 2 · b (mit zueinander kongruenten grau-blau und türkis gefärbten Puzzlestücken), die rechte den Sonderfall für a = b.

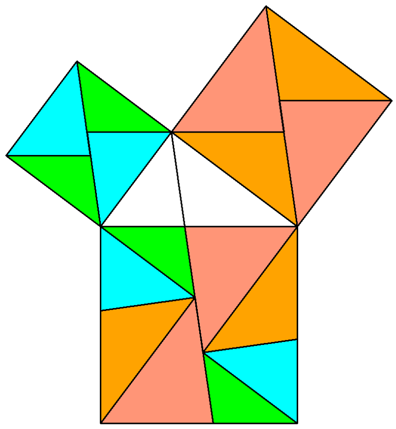
- **Ein Zerlegungsbeweis von BENJIR VON GUTHEIL († 1914)**

Für die Zerlegung der Katheten- und Hypotenusenquadrate nach BENJIR VON GUTHEIL benötigt man i. A. sieben Puzzlestücke. Faszinierend an dieser Zerlegung ist die symmetrische Anordnung der Puzzlestücke: Im Hypotenusenquadrat sind die Puzzlestücke punktsymmetrisch angeordnet, in den Kathetenquadraten achsensymmetrisch. Das kleinere Kathetenquadrat wird durch eine Diagonale in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Das größere Kathetenquadrat setzt sich zusammen aus zwei Puzzlestücken, die mit dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck übereinstimmen, einem quadratischen Puzzlestück mit Seitenlänge a – b und zwei dreieckigen Puzzleteilen, die sich mit den Puzzlestücken der Zerlegung des kleineren Kathetenquadrats zum Ausgangsdreieck ergänzen (vgl. Zerlegung des Hypotenusenquadrats).

Da die Zerlegung des Hypotenusenquadrates in punktsymmetrischer Weise erfolgt und die der Katheten-quadrate in achsensymmetrischer Weise, muss man beim Umlegen vom Katheten- zum Hypotenusen-quadrat zwei der Puzzleteile wenden.

- **Ein Zerlegungsbeweis von Paul Epstein (1871 – 1939) und Jakob Nielsen (1890 – 1959)**



Für die Zerlegung werden acht Puzzlestücke benötigt. Diese erhält man, indem man die Kathetenquadrate durch die Diagonalen teilt und außerdem Linien einzeichnet, die parallel zur Hypotenuse des Ausgangsdreiecks jeweils durch die andern beiden Eckpunkte der Quadrate verlaufen. Da beide Kathetenquadrate in gleicher Weise unterteilt werden, sind entsprechende Puzzlestücke in beiden Kathetenquadraten zueinander ähnlich.

Das Hypotenusenquadrat wird durch die Winkelhalbierende durch den Punkt C halbiert;
die Puzzlestücke werden so angeordnet, dass eine punktsymmetrische Zerlegung des Hypotenusenquadrats vorliegt.

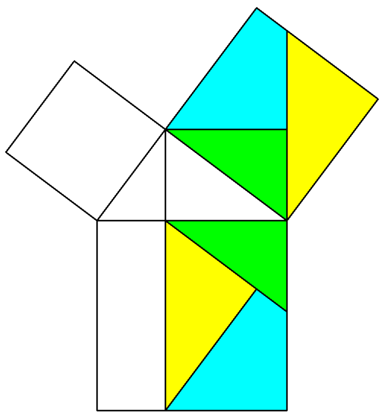
Für das Zeichnen der Puzzlestücke beachte man, dass die Winkel in den spitzwinkligen Dreiecken gleich α, 45° und 135° – α sind.

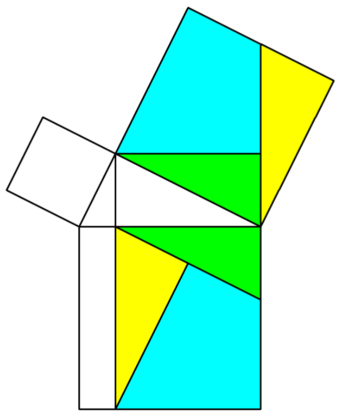
– Für welches rechtwinklige Dreieck ergeben sich achsensymmetrische Puzzlestücke?

- **Ein Zerlegungsbeweis von Hermann Dobriner (1857 – 1902) und Karl Gustav Hermann Thieme (1852 – 1926)**

Die Zerlegung der Pythagoras-Figur geschieht hier so, dass gleichzeitig auch der Kathetensatz des Euklid bewiesen wird, d. h., die Puzzlestücke des Kathetenquadrats über a passen genau in das Rechteck mit den Längen p und c und die des Kathetenquadrats über b genau in das Rechteck mit den Längen q und c und umgekehrt. Die grundlegende Idee der Zerlegung ist, Streifen der Breite p bzw. q durch die beiden Katheten-quadrate zu legen und die entstehenden Puzzlestücke durch waagerechte Linien so zu unterteilen, dass die Rechteckbereiche des Hypotenusenquadrats ausgefüllt werden können.

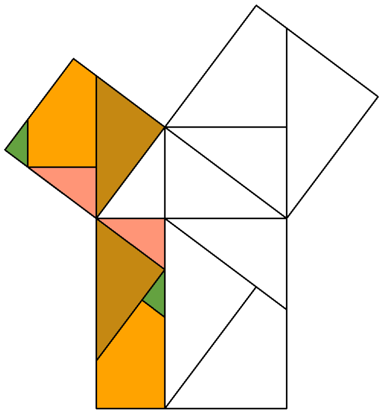
Die Anzahl der Puzzlestücke für das größere Kathetenquadrat beträgt stets drei: Die rechte vertikale Seite des Hypotenusen-quadrats wird verlängert, sodass ein Puzzlestück in der Größe des Ausgangsdreiecks abgetrennt wird. Das übrig bleibende Viereck wird durch eine Parallele zur Hypotenuse durch den Punkt C unterteilt, sodass das dann übrig bleibende viereckige Puzzlestück (türkis) unten in das rechte Hypotenusenrechteck passt.

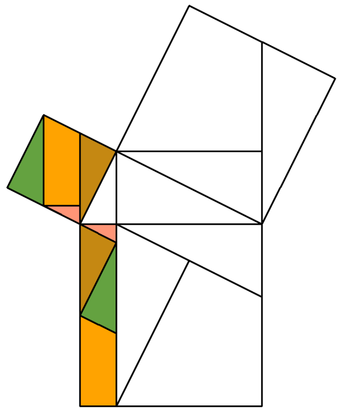




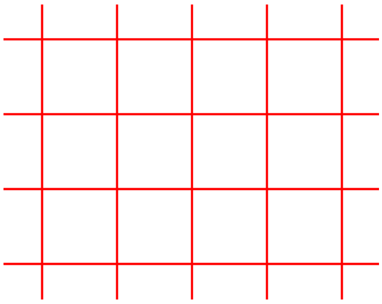
Für das kleinere Kathetenquadrat benötigt man im Falle eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ebenfalls nur drei Puzzlestücke – diese Anzahl richtet sich aber i. A. danach, wie breit das linke Hypotenusenrecht-eck ist, und kann im Prinzip sogar beliebig groß werden.

Die Abbildungen zeigen die Zerlegungen für die Fälle
a : b = 4 : 3 bzw. a : b = 2 :1
(genau drei Streifen).



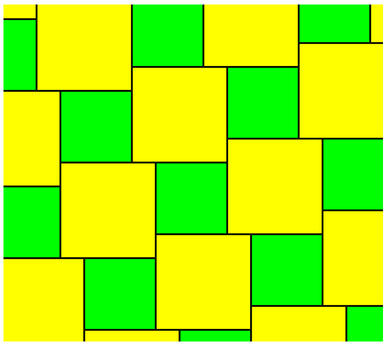


- **Darstellung der Zerlegungsbeweise von Perigal und Göpel mithilfe von Fliesenmustern**



Dass man eine Ebene mit Quadraten „parkettieren“ kann, weiß jeder, der sich einmal mit der Frage beschäftigt hat, wie Küche oder Badezimmer gefliest werden sollen. Ein solches Muster (*Q*-Muster) ist allerdings ziemlich langweilig.

Abwechslungsreicher ist ein Muster aus zwei unterschiedlich großen Quadraten, also aus großen und kleinen Quadraten (*guk*-Muster), mit dem ebenfalls eine Ebene vollständig ausgelegt werden kann.



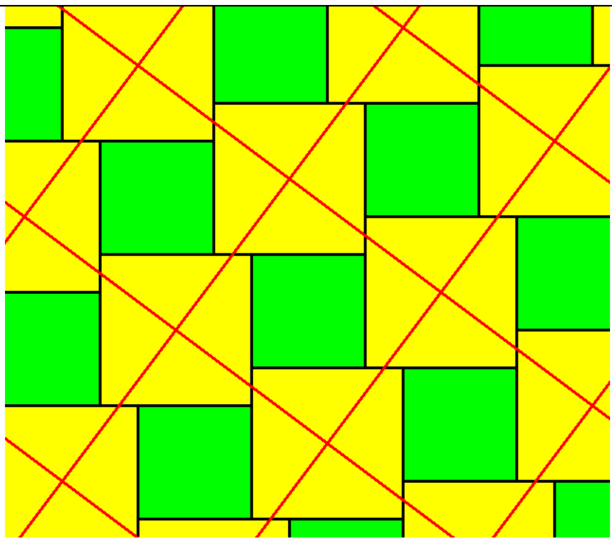
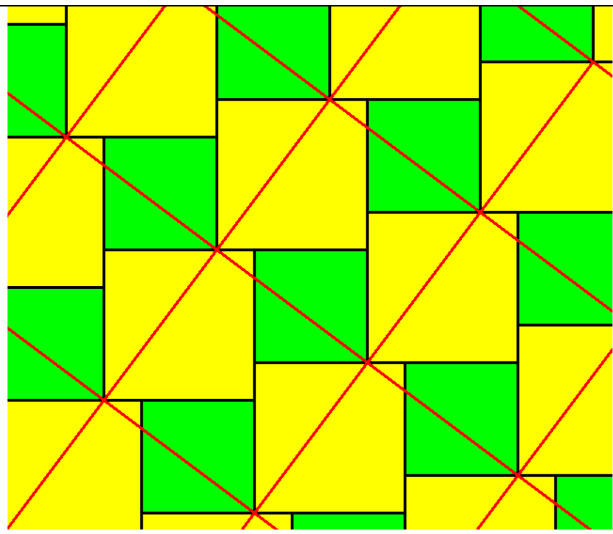
In jedem *guk*-Muster ist (versteckt) auch ein *Q*-Muster enthalten: Wählt man nämlich bei den großen oder kleinen Quadraten des *guk*-Musters einen bestimmten (aber beliebigen) Punkt aus und verbindet diese Punkte miteinander, dann ergibt sich genau ein *Q*-Muster.

Man kann dies wie folgt konkret umsetzen:

Eine Fläche wird mit unterschiedlich großen Quadraten im Sinne des *guk*-Musters gefliest. Dann legt man eine Folie darüber, auf der man die gewählten Punkte markiert und miteinander verbindet.

Je nach Wahl der Punkte erhält man die Zerlegung gemäß Perigal oder Göpel. Die gelben und grünen Fliesen bilden die Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks und die Quadrate des Q-Musters auf der Folie die Hypotenusenquadrate.

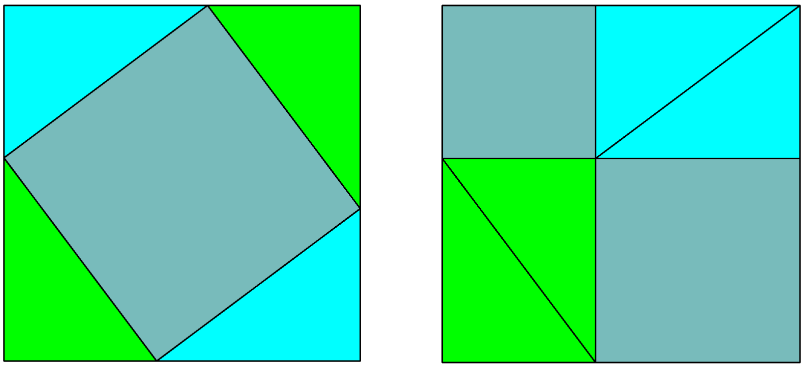
Dass *gelb* + *grün* = *rot* gilt, ergibt sich auch aus der Tatsache, dass mit beiden Mustern die Ebene vollständig parkettiert wird.

<table>
<tr>
<td>• Zerlegung gemäß Perigal
Das kleinere Kathetenquadrat (grün) wird von den roten Linien nicht geschnitten, das größere (gelb) wird durch die roten Linien in Puzzlestücke zerlegt – das Hypotenusenquadrat (rot umrandet) wird in ein grünes und vier gelbe Puzzlestücke zerlegt.</td>
<td>• Zerlegung gemäß Göpel
Die Kathetenquadrate werden durch die roten Linien in zwei bzw. drei Puzzlestücke zerlegt – das Hypotenusenquadrat (rot umrandet) wird in drei gelbe und zwei grüne Puzzlestücke zerlegt.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Die Folie kann nach links oder rechts bzw. nach oben oder unten verschoben werden – solange nur das grün gefärbte Quadrat innerhalb des roten Rahmens bleibt – vergleiche hierzu die Erläuterungen zur Perigal’schen Idee.</td>
<td>
Die Folie muss so gelegt werden, dass die Eckpunkte des roten Hypotenusenquadrats mit den unteren Berührpunkten von nebeneinander liegenden gelb und grün gefärbten Kathetenquadraten übereinstimmen.</td>
</tr>
</table>

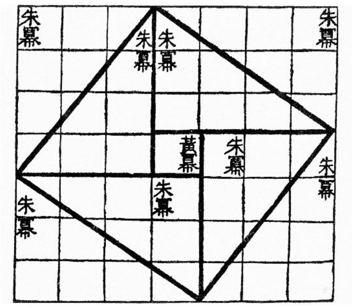
• Einige Beweise von historischer Bedeutung

Der (angebliche) Beweis des Pythagoras

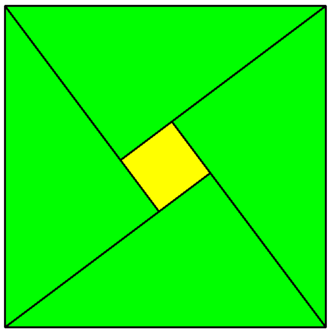
Der griechische Mathematiker Proclus (412 – 485) war davon überzeugt, dass die Idee zu den beiden rechts abgebildeten Figuren von Pythagoras selbst stammt, und bezeichnete dies als den Beweis des Pythagoras.



Beweis aus der Schrift *Zhou Bi Suan Jing*
(chinesische Schrift aus dem 1. Jahrhundert v. Chr.)



Beweis von Bhaskara (1114 – 1185)



Ein Quadrat mit der Seitenlänge c wird in vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und ein Quadrat der Seitenlänge b – a zerlegt (a < b). Dann gilt:

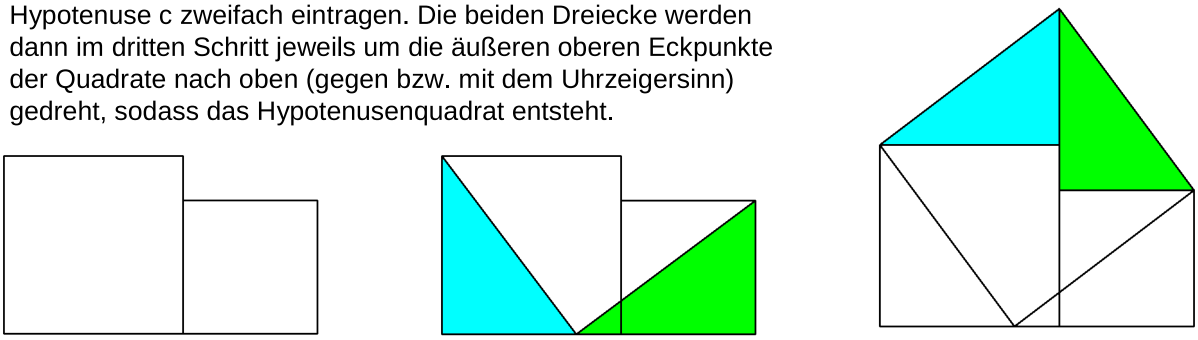
$$c^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2$$

Bhaskara schreibt zwar, dass man bei diesem Beweis nur hinschauen muss (Siehe !), aber ohne algebraische Kenntnisse (Binomischer Lehrsatz) kommt man nicht weit.

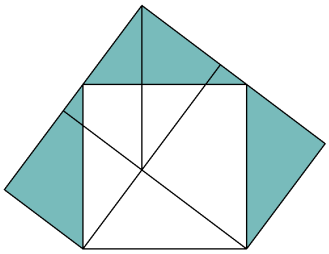
• Drei Beweise von Thabit ibn Qurra (836 – 901)

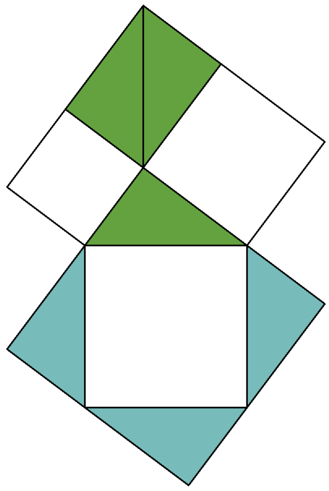
Der bedeutende assyrische Mathematiker und Astronom war ursprünglich als Geldwechsler tätig, bevor er aufgrund seiner Sprachbegabung von den Banu-Musa-Brüdern eingeladen wurde, im *Haus der Weisheit* in Bagdad die Schriften griechischer Mathematiker zu übersetzen. Nach der intensiven Beschäftigung mit den *Elementen* des Euklid entwickelte er selbstständig eigene Beweise für den Pythagoreischen Lehrsatz.

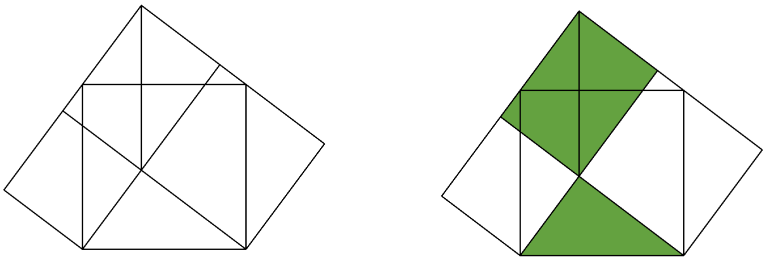
- In seinem ersten Beweis zeichnete er die beiden Kathetenquadrate mit den Seiten a und b (a > b) nebeneinander. In diese Figur lässt sich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c zweifach eintragen. Die beiden Dreiecke werden dann im dritten Schritt jeweils um die äußeren oberen Eckpunkte der Quadrate nach oben (gegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn) gedreht, sodass das Hypotenusenquadrat entsteht.



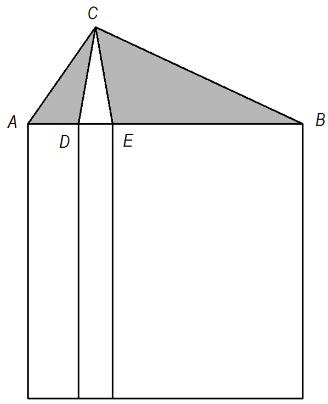
- Die Genialität des Ansatzes zum zweiten Beweis von Thabit ibn Qurra erschließt sich insbesondere, wenn man die Figur unterschiedlich färbt oder wenn man einen Teil der Figur dreht.







- Der dritte Beweis beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes und enthält damit auch einen **Beweis für die Umkehrung des Satzes**.



Im stumpfwinkligen Dreieck ABC rechts sind die Punkte D und E auf AB so eingetragen, dass die Dreiecke ABC, ACD und CBE zueinander ähnlich sind. Daher gilt:

$|AC| : |AB| = |AD| : |AC|$, also $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$, und
$|BC| : |AB| = |EB| : |BC|$, also $|BC|^2 = |AB| \cdot |EB|$.

Somit folgt: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot (|AD| + |EB|)$.

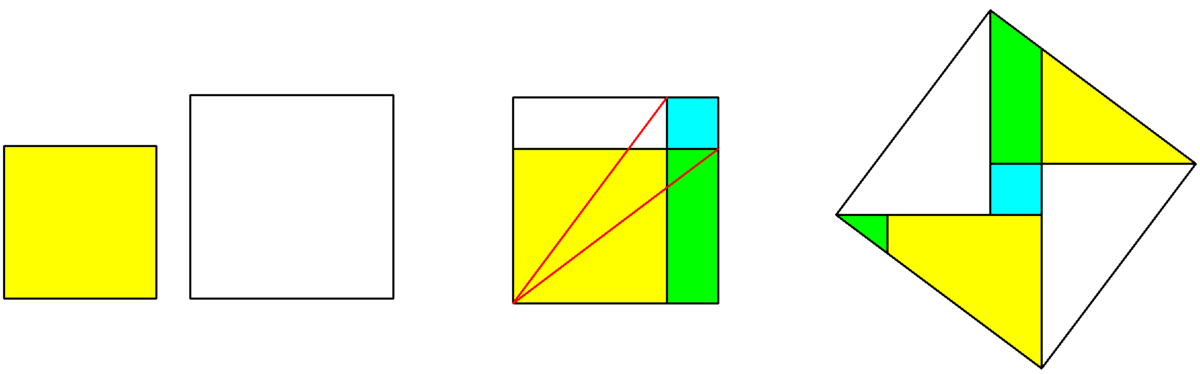
Ist der Winkel bei C ein rechter Winkel, dann fallen die Punkte D und E zusammen, und es folgt $|AC|^2+|BC|^2 = |AB|^2$.

Ist der Winkel bei C stumpf, dann muss das Quadrat über der Seite AB um das Rechteck der Breite DE verkleinert werden, damit es flächengleich zur Summe der Quadrate über den kürzeren Seiten ist: $|AC|^2+|BC|^2 = |AB|^2 - |AB| \cdot |DE|$.

Im Falle eines spitzwinkligen Dreiecks ergibt sich entsprechend, dass das Quadrat über der Seite AB vergrößert werden muss.

- **Zum Nachdenken: Ein Beweis von Abu'l-Wafa al-Buzjani (940 – 998)**

Von Abu'l-Wafa, einem der bedeutendsten persischen Mathematiker des Mittelalters, stammt die folgende Beweisvariante: Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen a (gelb) und b, wobei a < b. Das Quadrat mit Seitenlänge a wird in eine der Ecken des Quadrats mit Seitenlänge b gelegt; so entsteht in der gegenüberliegenden Ecke ein Quadrat mit Seitenlänge b – a (türkis). Die roten Strecken haben die Länge c. Aus den Puzzleteilen von a² und b² ergibt sich dann ein Quadrat der Seitenlänge c.

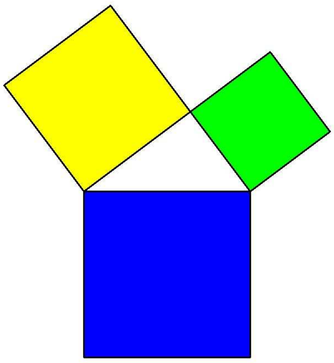
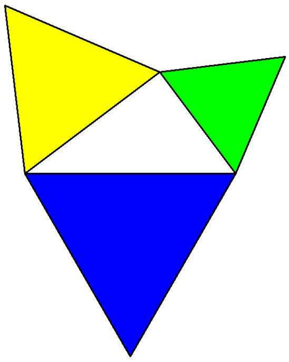
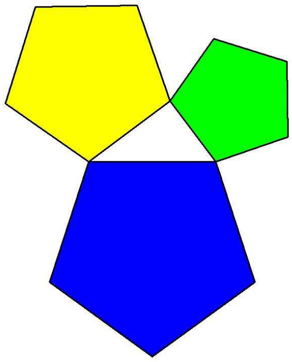
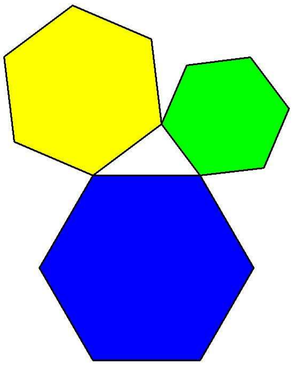
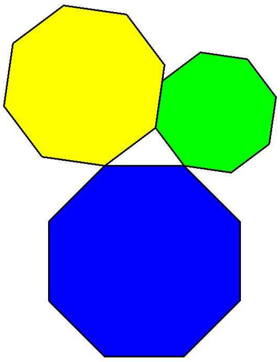
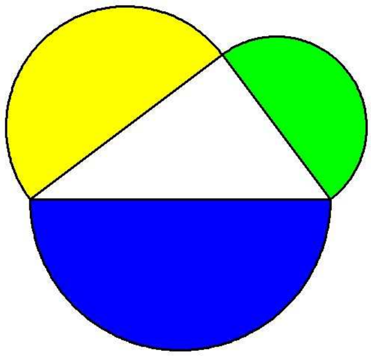


• Verallgemeinerung des Satzes von PYTHAGORAS

Der Satz über die Flächengleichheit der Flächenstücke über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gilt nicht nur für Quadrate, sondern für beliebige zueinander ähnliche Figuren.

Denn die Berechnung der Flächeninhalte A aller Figuren erfolgt mithilfe von Formeln des Typs $A = k \cdot s^2$, wobei s für die Seitenlängen von a bzw. b bzw. c steht und k ein figur-typischer Faktor ist:

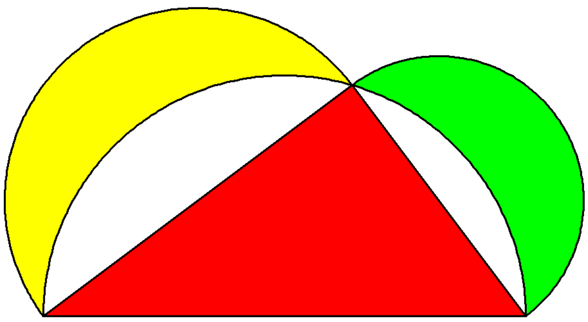
$k = 1$ für das Quadrat, $k = \frac{\sqrt{3}}{4}$ für das gleichseitige Dreieck, $k = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ für das regelmäßige Fünfeck, $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ für das regelmäßige Sechseck, $k = 2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)$ für das regelmäßige Achteck und $k = \frac{\pi}{8}$ für Halbkreise über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.

• Die Möndchen des HIPPOKRATES VON CHIOS

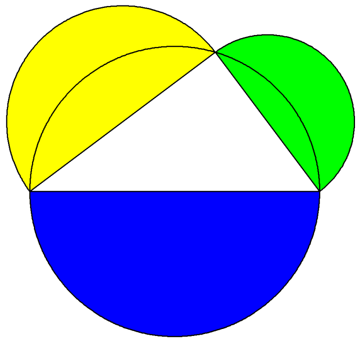
Die letzte Figur führt zu einem verblüffenden Satz, den der griechische Mathematiker HIPPOKRATES VON CHIOS um 450 v. Chr. entdeckte:

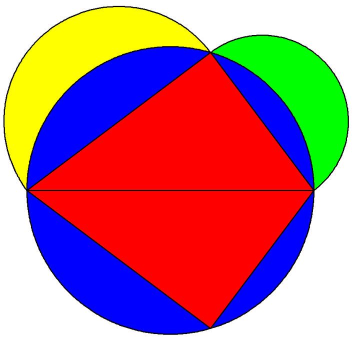
- Eine geradlinig begrenzte Fläche (ein rechtwinkliges Dreieck) kann genauso groß sein wie krummlinig begrenzte Flächen (die Möndchen), konkret:
- Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zur Summe der Flächen der beiden Möndchen über den Katheten.

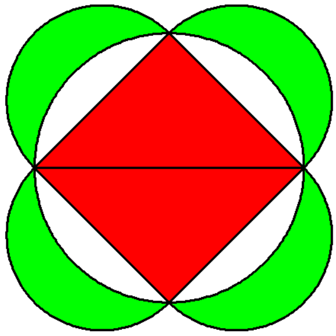


Um den Satz zu beweisen, muss man nur die o. a. Idee des Satzes von PYTHAGORAS anwenden:
Die Fläche des Halbkreises über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist genauso groß wie die Summe der Halbkreisflächen über den Katheten (Abbildung links). Klappt man dann den Halbkreis „unter“ der Hypotenuse nach oben (Abbildung Mitte), erkennt man den Zusammenhang.

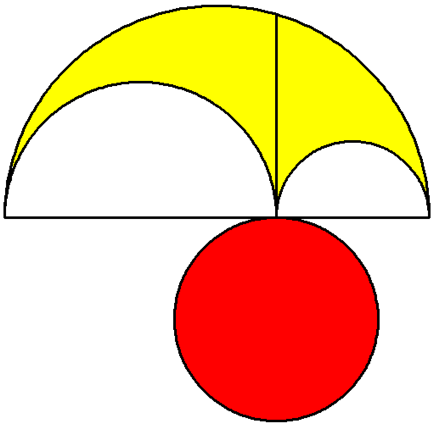
Die Abbildung rechts zeigt den Sonderfall eines gleichschenklig- rechtwinkligen Dreiecks – verdoppelt.







- **Der Arbelos des ARCHIMEDES**

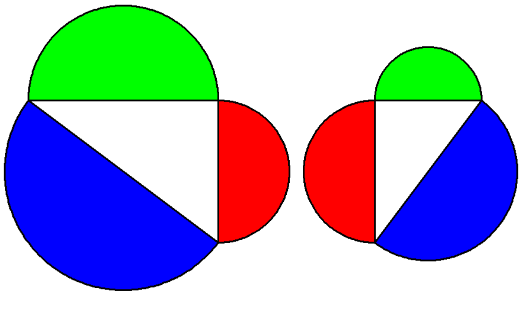


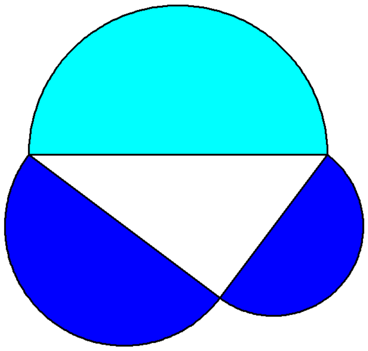
Der Beweis, dass die sichelförmige Figur (gelb), das sogenannte *Schustermesser* (griech. *Arbelos*), flächengleich ist zum rot gefärbten Kreis (dessen Durchmesser gleich der „Höhe“ ist), ergibt sich durch Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS auf ein rechtwinkliges Dreieck und die beiden rechtwinkligen Teildreiecke, die durch die „Höhe“ auf der Hypotenuse gebildet werden.

Abbildungen links unten: rot = blau – grün

Abbildung rechts unten: blau = türkis

Hieraus folgt: türkis – grün = gelb = rot

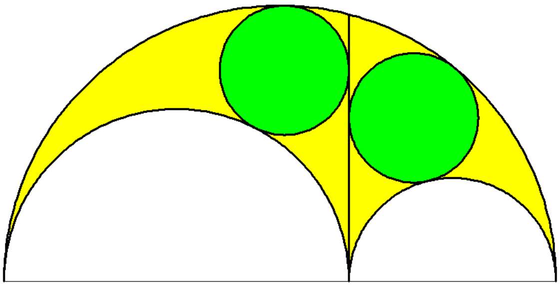




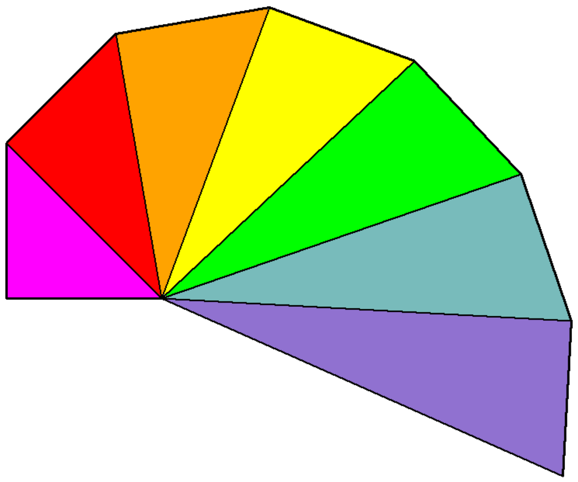
- **Zwillingskreise des ARCHIMEDES**

In die beiden Teile des Schustermessers können zwei Kreise eingetragen werden.

- Warum sind diese beiden grün gefärbten Kreise gleich groß?



… zum Satz des PYTHAGORAS gibt es noch viel zu entdecken …



Bei der **PYTHAGORAS-Spirale** beginnt man mit einem rechtwinkligen Dreieck mit gleichlangen Katheten der Länge 1 LE. Die Hypotenuse hat dann die Länge $\sqrt{2}$ LE.

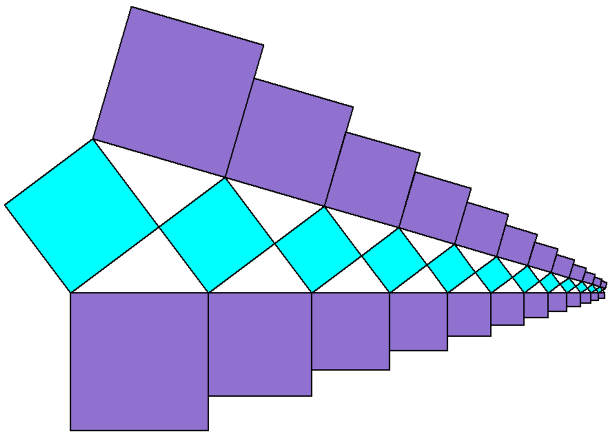
Diese Hypotenuse ist dann eine der beiden Katheten des nächsten rechtwinkligen Dreiecks. Die andere Kathete hat wieder die Länge 1 LE, sodass die neue Hypotenuse die Länge $\sqrt{3}$ LE hat usw.

Man kann z. B. untersuchen, …

… welchen Flächeninhalt die wachsende Figur nach n Schritten hat,

… wie viele Dreiecke man anschließen kann, bis sich die Dreiecke überschneiden …

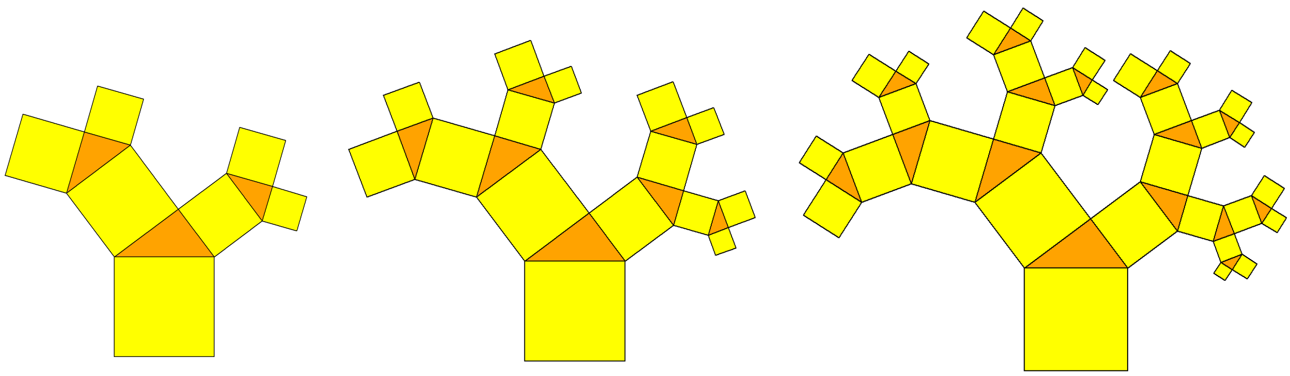
… auf welcher Art von Spiralen die „äußeren" Punkte liegen, …



Bei der **achsensymmetrischen PYTHAGORAS-Folge** spiegelt man zunächst die Figur an der gemeinsamen Diagonale der beiden Kathetenquadrate und setzt dann die Figur fort, indem das kleinere Kathetenquadrat zum größeren Kathetenquadrat wird.

Man kann z. B. untersuchen, …

… welchen Flächeninhalt die wachsende Figur hat und wie dieser von den gewählten Ausgangsgrößen abhängt.



Beim **PYTHAGORAS-Baum** startet man mit der typischen PYTHAGORAS-Figur, benutzt dann aber im nächsten Schritt die Kathetenquadrate als neue Hypotenusenquadrate.

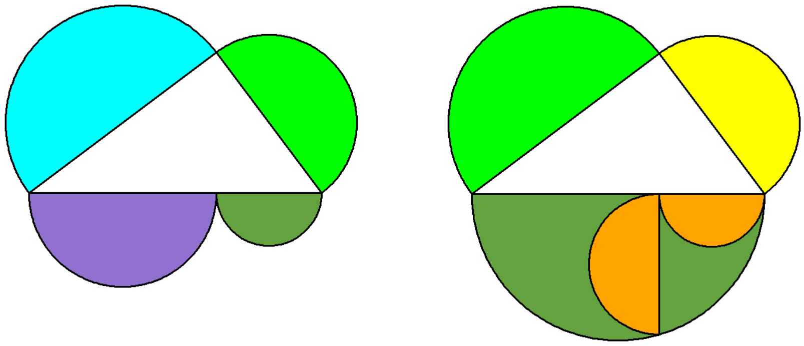
Man kann z. B. untersuchen, …

… welchen Flächeninhalt die wachsende Figur hat,

… wann es zu Überschneidungen von Teilfiguren kommt,

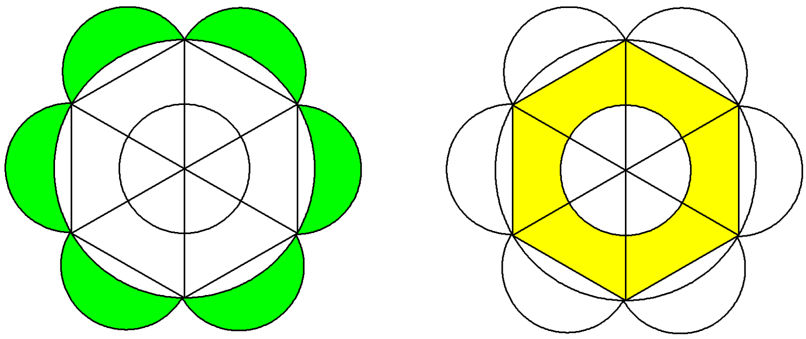
… welche Kurven näherungsweise entstehen, …

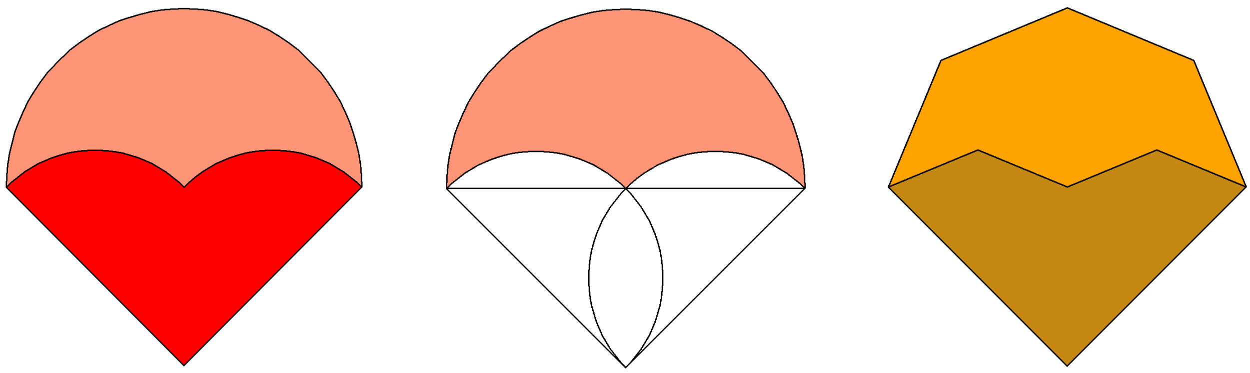
Welche Beziehung besteht zwischen den Flächeninhalten der Halbkreise?



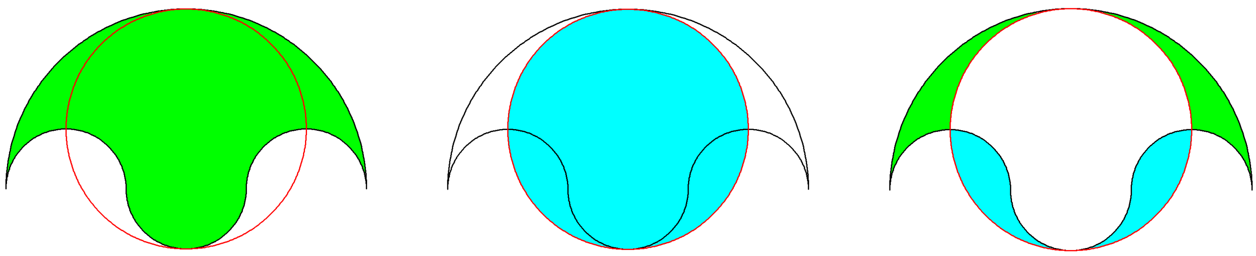
… auch bei den Möndchen gibt es noch mehr zu entdecken …

HIPPOKRATES fand auch heraus, dass der Flächeninhalt der sechs Möndchen über den Seiten eines regelmäßigen 6-Ecks genauso groß ist wie der Flächeninhalt des 6-Ecks, aus dem die Fläche eines Kreises herausgenommen wird, dessen Radius halb so groß ist wie die Seitenlänge des 6-Ecks.





Die Beweisidee für die Möndchen des HIPPOKRATES lässt sich auch auf die abgebildete **Herzfigur** anwenden, aber nicht nur für Halbkreise, sondern auch für regelmäßige n-Ecke, wobei n Vielfaches von 4 sein muss.

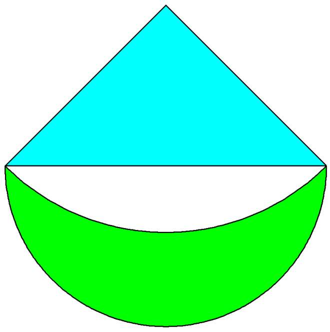


In seinen *Lemmata* beschreibt ARCHIMEDES eine Figur, die aus vier Halbkreisen gebildet wird (vgl. Abbildung links). Wegen ihrer Form wird sie als *Salinon* (Salzfässchen) bezeichnet.

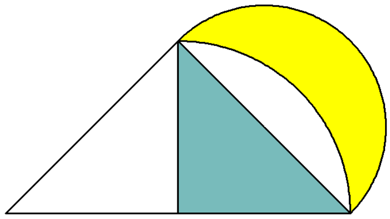
Durch einfache Rechnung kann man zeigen, dass die in der Abbildung links grün gefärbte Fläche genauso groß ist wie des türkis gefärbten Kreises in der mittleren Abbildung. Hieraus folgt die Gleichheit der unterschiedlich gefärbten Flächenstücke in der Abbildung rechts.

Das Möndchen über der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist genauso groß wie das Ausgangsdreieck:

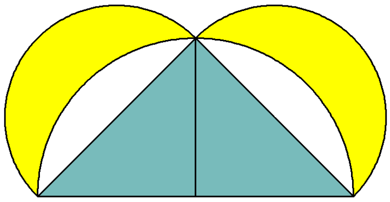
grün = türkis



Denn: Das halbe Ausgangsdreieck ist ähnlich zum Ausgangsdreieck

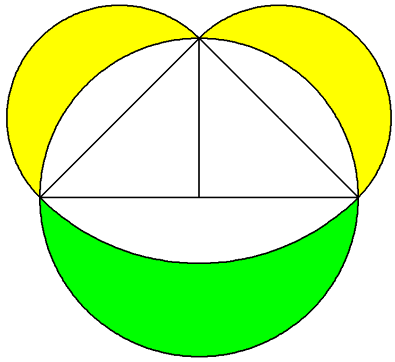


und die beiden Möndchen sind zusammen so groß wie das Ausgangsdreieck



Folgerung: Die Möndchen über den Seiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks sind zueinander ähnlich, daher gilt:

2 · gelb = grün



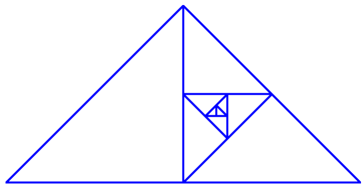
Noch mehr Variationen zum Thema „Möndchen“ findet man unter

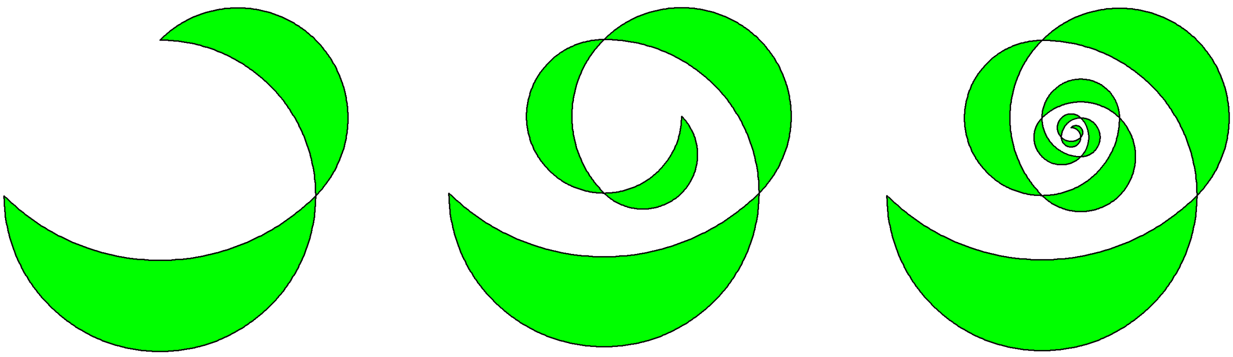
- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Moendchen/Moendchen.htm
- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Moendchen2/Moendchen2.htm

Beispielsweise untersucht Hans Walser eine Folge von immer kleiner werdenen Möndchen über einem Streckenzug auf ineinander geschachtelten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken. Dabei gelten die folgenden Eigenschaften:

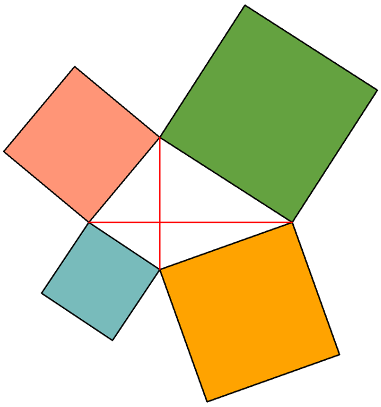
– Jedes Möndchen ist halb so groß wie sein Vorgänger.

– Hat das Ausgangsdreieck (also auch das erste Möndchen der Folge) den Flächeninhalt 1 FE, dann haben alle Möndchen zusammen den Flächeninhalt $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$ FE.





- **Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS bei Vierecken**

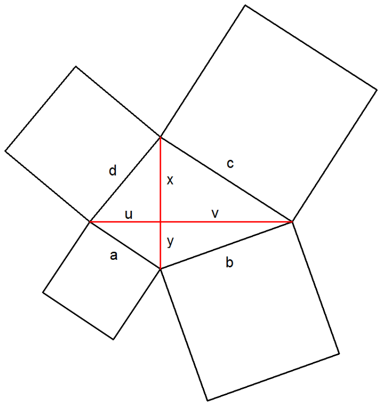


Auch über den Seiten eines Vierecks kann man Quadrate zeichnen. Es gilt dann der folgende bemerkenswerte Satz:

Satz über orthodiagonale Vierecke

- Die Summen der Quadrate von einander gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks sind genau dann gleich, wenn sich die Diagonalen des Vierecks orthogonal schneiden.

Ein Viereck ist durch die Längen der vier Seiten a, b, c, d noch nicht festgelegt. Zu gegebenen Seitenlängen gibt es unendlich viele Vierecke. Der Satz besagt aber: Egal, welche Gestalt das Viereck einnimmt: Wenn für die Seiten die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ erfüllt ist, dann schneiden sich die Diagonalen im rechten Winkel (und umgekehrt).



Zum Beweis:

Wenn sich die Diagonalen in einem Viereck orthogonal schneiden, dann gilt (vgl. Abbildung): $a^2 = u^2 + y^2$ und $c^2 = x^2 + v^2$ sowie $b^2 = y^2 + v^2$ und $d^2 = x^2 + u^2$, also: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Schneiden sich umgekehrt die Diagonalen eines Vierecks unter den Scheitelwinkeln ε bzw. $180° - \varepsilon$, dann gilt in den Teildreiecken gemäß Kosinussatz:

$a^2 = u^2 + y^2 - 2uy \cdot \cos(\varepsilon)$ und $c^2 = v^2 + x^2 - 2vx \cdot \cos(\varepsilon)$, also
$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 - 2 \cdot (uy + vx) \cdot \cos(\varepsilon)$ sowie

$b^2 = v^2 + y^2 - 2vy \cdot \cos(180° - \varepsilon)$ und $d^2 = x^2 + u^2 - 2xu \cdot \cos(180° - \varepsilon)$,
also: $b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 + 2 \cdot (vy + ux) \cdot \cos(\varepsilon)$.

Aus $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ folgt daher $(uy + vx + vy + ux) \cdot \cos(\varepsilon) = 0$ und, da nicht alle Summanden uy, vx, vy, ux gleichzeitig gleich null sein können, ergibt sich hieraus: $\cos(\varepsilon) = 0$, d. h., $\varepsilon = 90°$.

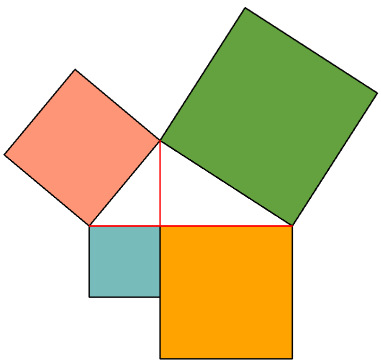
Hinweis: Der Beweis der Umkehrung kann auch indirekt geführt werden, vgl. z. B. *Josefsson, Martin: "Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals", Forum Geometricorum* ***12****: 13–25* (2012):

- http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201202.pdf

Zum Beweis siehe auch die Ergänzung am Ende dieses Beitrags sowie

- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Orthodiag_Vierecke/Orthodiag_Vierecke.htm

- Besonders eindrucksvoll ist das folgende Experiment: Man fertige aus festem Material (Pappe, Holz, Metall, …) Streifen der Länge a, b, c, d, welche die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ erfüllen. Diese werden an den Enden drehbar miteinander verbunden (z. B. mit einer Verschlussklammer). Die Diagonalen können dann mithilfe von Gummibändern realisiert werden. Egal, welche Gestalt das Viereck annimmt: Die Gummibänder schneiden sich im rechten Winkel!



– Ein Sonderfall des Satzes liegt vor, wenn $y = 0$, vgl. Abbildung links. Das Viereck ist eigentlich ein Dreieck, das durch die Höhe h_c auf c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Hier gilt:

  $h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$, also $a^2 + q^2 = b^2 + p^2$.

– Ein anderer Sonderfall ist gegeben, wenn z. B. $x = y$, also wenn das Viereck achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen ist, z. B. beim symmetrischen Drachen, d. h., es gilt: $a = d$ und $b = c$.

  Dann ist die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ erst recht erfüllt.

– Wenn man die Länge einer der Seiten des Vierecks gegen null gehen lässt, ergibt sich die gewöhnliche PYTHAGORAS-Figur.

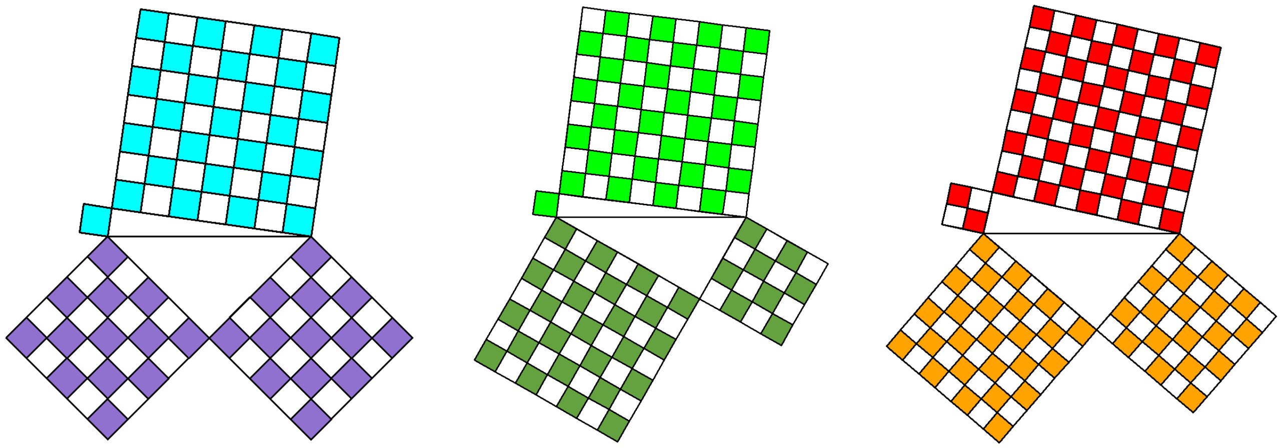
- ## Ganzzahlige PYTHAGORAS-Partner

Das rechtwinklige Dreieck mit den ganzzahligen Kathetenlängen 1 LE und 7 LE besitzt eine Hypotenuse, die genauso lang ist wie die des rechtwinkligen Dreiecks mit zwei ganzzahligen Kathetenlängen 5 LE (dies ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck): $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$.

Auch zu den Hypotenusenquadraten mit Flächeninhalt 65 FE und 85 FE gibt es jeweils zwei verschiedene ganzzahlige Partner:

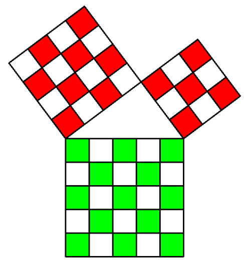
$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ $\qquad$ $85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$

➢ Gibt es noch weitere solche ganzzahligen PYTHAGORAS-Partner?



- ## Besondere PYTHAGORAS-Folgen

Im Beitrag 08/2016 über **Summen von Potenzen natürlicher Zahlen** wird eine besondere Folge von Gleichungen über Quadratzahlen vorgestellt:

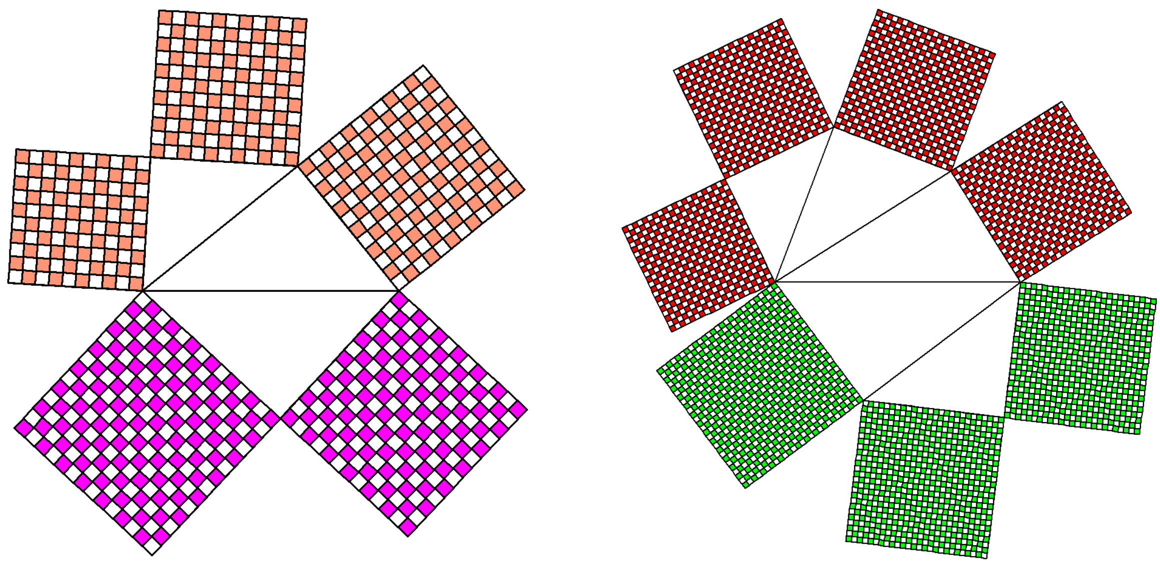


Über die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ hinaus, die den Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 3, 4, 5 beschreibt, existieren noch weitere (unendlich viele) Beziehungen ähnlicher Art:

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ $\qquad$ $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$ usw. (siehe dort).

Diese Beziehungen lassen sich – ähnlich wie die ganzzahligen PYTHAGORAS-Partner – graphisch darstellen:



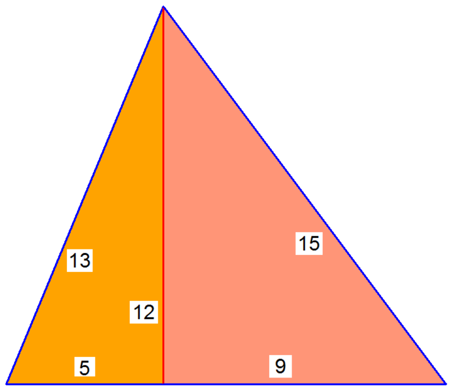
- **HERON’sche Dreiecke**

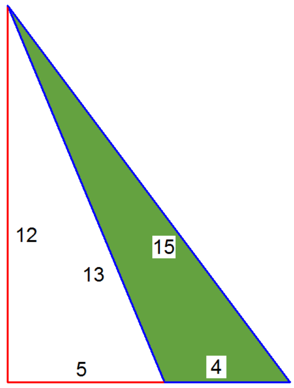
In der Geometrie werden Dreiecke, bei denen Seitenlängen und Flächeninhalt ganzzahlig sind, zu Ehren des griechischen Mathematiker HERON VON ALEXANDRIA (ca. 10 – 70 n. Chr.) als HERON’sche Dreiecke bezeichnet.

- Rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen ein PYTHAGOReisches Zahlentripel bilden, sind auch HERON’sche Dreiecke. Denn mindestens eine der Katheten hat eine geradzahlige Seitenlänge (vgl. *Mathematik-ist-schön*-Beitrag 08/2015); daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks als halbes Produkt der beiden Kathetenlängen ebenfalls ganzzahlig.

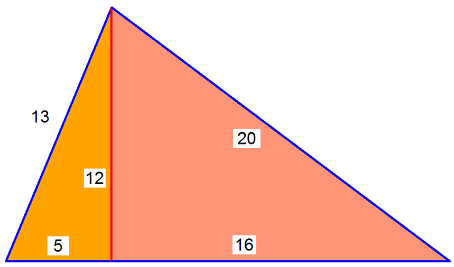
HERON’sche Dreiecke kann man auch dadurch erhalten, dass man zwei passende rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zusammensetzt – dies kann in zwei „Richtungen“ geschehen.

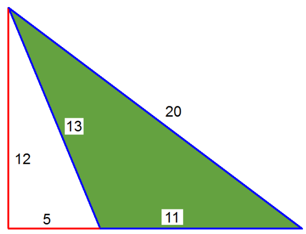
Beispiel 1: Die zu den Tripeln (5 ; 12 ; 13) und (9 ; 12 ; 15) gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge 12 LE.



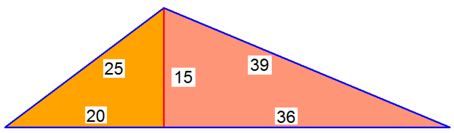


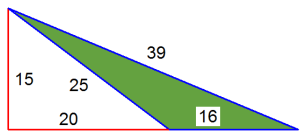
Beispiel 2: Die zu den Tripeln (5 ; 12 ; 13) und (12 ; 16 ; 20) gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge 12 LE.



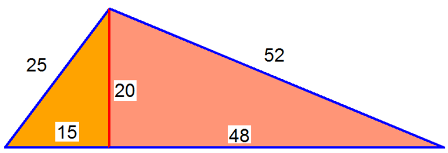


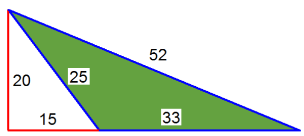
Beispiel 3: Die zu den Tripeln (15 ; 20 ; 25) und (15 ; 36 ; 39) gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge 15 LE.





Beispiel 4: Die zu den Tripeln (15 ; 20 ; 25) und (20 ; 48 ; 52) gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge 20 LE.





Der Flächeninhalt A des zusammengesetzten Dreiecks berechnet sich aus $A = \frac{1}{2} \cdot z \cdot h$, wobei h die Länge der gemeinsamen Kathete und z Summe bzw. Differenz der Längen der nicht-gemeinsamen Katheten ist.

Allgemein kann man zu zwei PYTHAGOReischen Zahlentripeln jeweils acht HERON’sche Dreiecke angeben: Sind (a ; b ; c) und (d ; e ; f) irgendwelche PYTHAGOReische Zahlentripel, dann gehören dazu unendlich viele zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen $r \cdot a$, $r \cdot b$, $r \cdot c$ und $s \cdot d$, $s \cdot e$, $s \cdot f$.
Die Faktoren r, s kann man – mithilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen – so wählen, dass die beiden Dreiecke jeweils in zwei Kathetenlängen übereinstimmen:

(1) $r \cdot a = s \cdot d$ (2) $r \cdot a = s \cdot e$ (3) $r \cdot b = s \cdot d$ (d) $r \cdot b = s \cdot e$

In den Beispielen oben wurden die Tripel (3 ; 4 ; 5) und (5 ; 12 ; 13) betrachtet: In Beispiel 1 ergaben sich die Faktoren r = 3 und s = 1, in Beispiel 2 dann r = 4 und s = 1, in Beispiel 3 waren dies r = 5 und s = 3 und in Beispiel 4 schließlich r = 5 und s = 4.

- **Nicht zerlegbare HERON'sche Dreiecke**

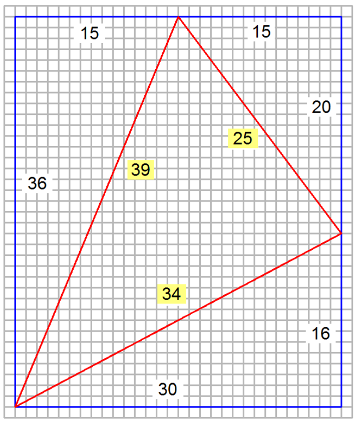
Außer den auf einfache Art zu bestimmenden zerlegbaren HERON'schen Dreiecken existieren auch solche, die sich nicht durch Aneinandersetzen (also als Summe oder Differenz) zweier rechtwinkliger Dreiecke ergeben.

Das erste Dreieck dieser Art wurde vom amerikanischen Mathematiker FITCH CHENEY im Jahr 1929 gefunden; es hat die Seitenlängen 25 LE, 34 LE und 39 LE. Das kleinste Dreieck dieses Typs hat die Seitenlängen 5 LE, 29 LE, 30 LE.

Die allgemeine Theorie hierzu setzt tiefergehende Kenntnisse der Geometrie voraus, auf die hier nicht eingegangen wird. Im Jahr 2001 konnte schließlich der folgende Satz bewiesen werden:

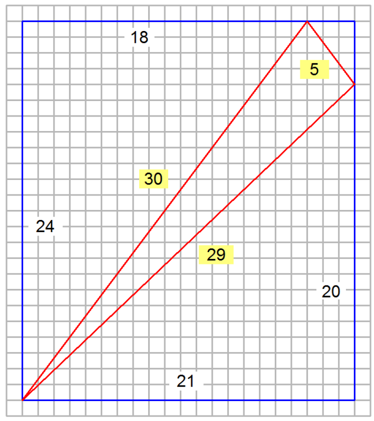
- **Die Eckpunkte von nicht zerlegbaren HERON'schen Dreiecken lassen sich in ein Koordinatengitter eintragen, d. h., die Eckpunkte dieser Dreiecke haben ganzzahlige Koordinaten.**

Nicht zerlegbare HERON'sche Dreiecke treten also als Restdreiecke auf, wenn von geeigneten Rechtecken drei rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen abgeschnitten werden:



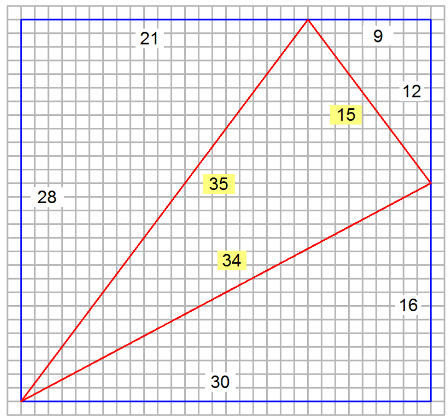
Flächeninhalt des Dreiecks:

A = 30 · 36 – ½ · (30 · 16 + 15 · 20 + 15 · 36) = 420



Flächeninhalt des Dreiecks:

A = 21 · 24 – ½ · (21 · 20 + 3 · 4 + 18 · 24) = 72



Flächeninhalt des Dreiecks:

A = 30 · 28 – ½ · (30 · 16 + 9 · 12 + 21 · 28) = 252

Die Beispiele wurden dem Beitrag von PAUL YIU: *Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles* entnommen:

- http://math.fau.edu/yiu/Southern080216.pdf

Hinweis: Man kann zeigen, dass für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC im Koordinatensystem (mit A (x_A | y_A), B (x_B | y_B), C (x_C | y_C)) folgende allgemeine Formel gilt:

Flächeninhalt des Dreiecks ABC = ½ · $x_A \cdot (y_B - y_C)$ + ½ · $x_B \cdot (y_C - y_A)$ + ½ · $x_C \cdot (y_A - y_B)$

vgl. STRICK, H. K.*: Berechnungen an Dreiecken im Koordinatensystem, Praxis der Mathematik, 1/38 (1996)*

In den Beispielen oben wurde der Punkt A in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt, also $x_A = y_A = 0$. Somit vereinfacht sich die Berechnungsformel zu

Flächeninhalt des Dreiecks ABC = ½ · $(x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B)$

Beispiel 1: A = ½ · (30 · 36 – 15 · 16) = 420

Beispiel 2: A = ½ · (21 · 24 – 18 · 20) = 72

Beispiel 3: A = ½ · (30 · 28 – 21 · 16) = 252

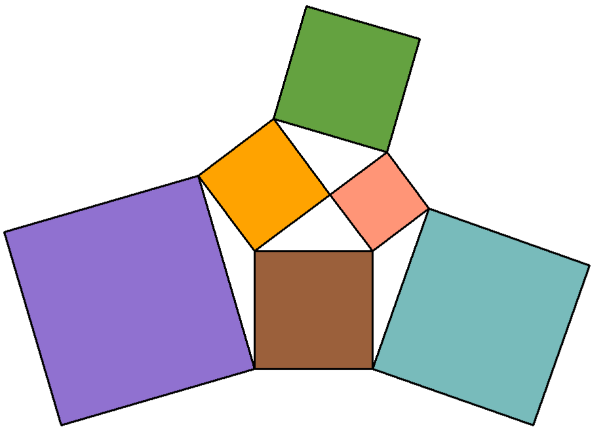
- Welche anschauliche Bedeutung hat der vereinfachte Berechnungsterm ½ · $(x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B)$?

- **Ergänzung zu der Knobelaufgabe von Seite 4**

Weitere Variationen hierzu finden Sie unter

- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen/Quadrate_ansetzen.htm
- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoras-Schmetterling/Pythagoras-Schmetterling.htm
- http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Schiefer_Pythagoras/Schiefer_Pythagoras.htm

Beispielsweise gilt:



braun = rosa + orange

braun = oliv

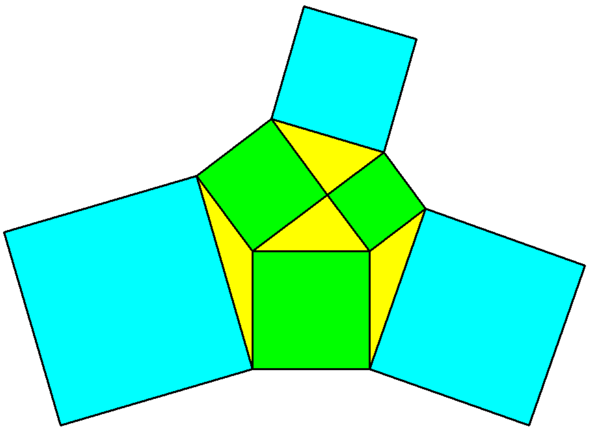
braun + oliv = 2 · (rosa + orange)

lila = 4 · rosa + 1 · orange
= 3 · rosa + 1 · braun

blaugrau = 4 · orange + 1 rosa
= 3 · orange + 1 · braun

lila + blaugrau = 5 · braun

oliv + lila + blaugrau
= 3 · (braun + orange + rosa)

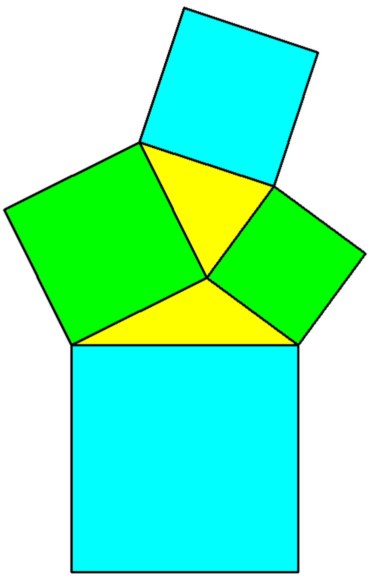


kurz:

– Die türkis gefärbten Flächen sind zusammen
dreimal so groß wie die grün gefärbten Flächen.

Dabei gilt:

Alle gelb gefärbten Flächen sind gleich groß.



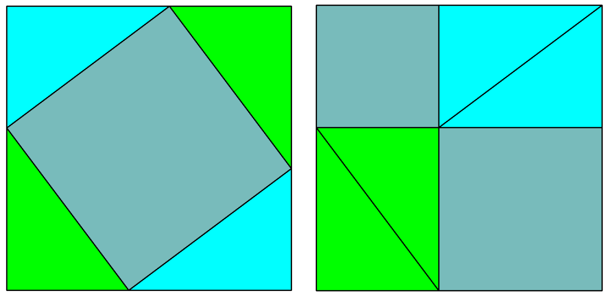
Für die Verallgemeinerung des Problems wird verwiesen auf den folgenden Satz:

- Zeichnet man Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks und ergänzt die Fläche zwischen zwei Quadraten zu einem Dreieck, auf das dann wiederum ein Quadrat gesetzt wird, dann sind die beiden Dreiecke (gelb) gleich groß, und die beiden äußeren Quadrate der Figur (türkis) sind zusammen doppelt so groß wie die beiden inneren Quadrate (grün) zusammen.

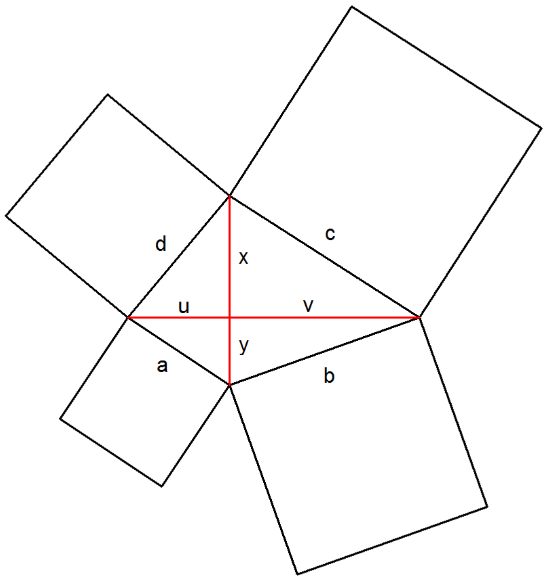
– Welche Konsequenzen ergeben sich, wenn man diese Figur wie oben durch weitere Quadrate (nach rechts und nach links) ergänzt?

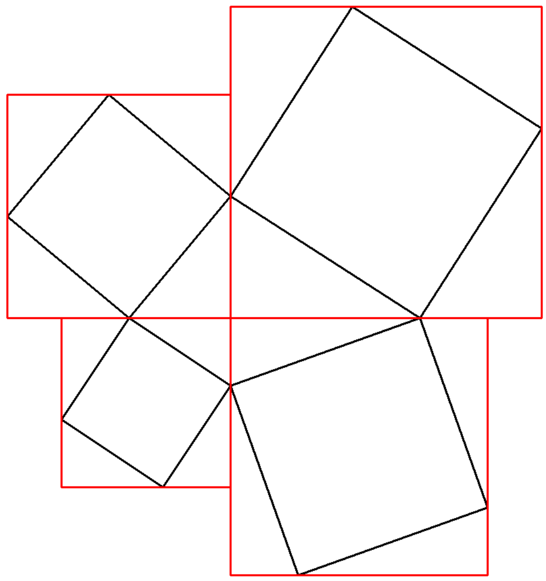
- **Ergänzung zum Satz über orthodiagonale Vierecke**

Wie oben ausgeführt, kann man den Beweis des Satzes von PYTHAGORAS auch mithilfe eines Hilfsquadrats zeigen, welches das rechtwinklige Ausgangsdreieck viermal enthält und je nach Anordnung das Hypotenusenquadrat oder die beiden Kathetenquadrate, vgl. die Abbildungen rechts.

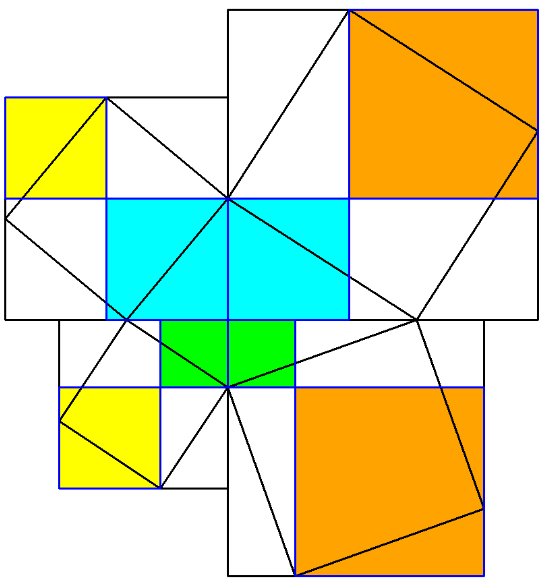


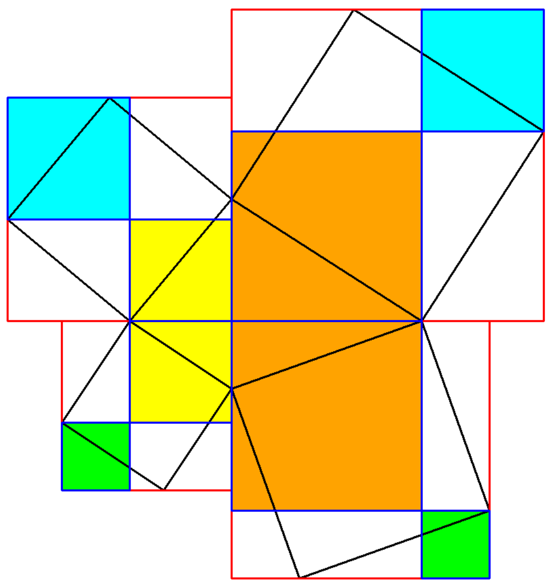
Die Figur mit den Quadraten über den Seiten eines Vierecks ergänzt man hier um vier Hilfsquadrate mit den Seitenlängen u + x, x + v, v + y und y + u.



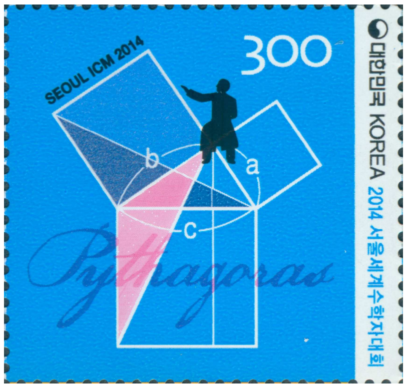


In diesen Hilfsquadraten werden dann die ursprünglichen Quadrate über den Vierecksseiten (= Hypotenusenquadrate) ersetzt durch die flächengleichen Kathetenquadrate. Zwei der verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Die Flächengleichheit der Summe der Quadrate von jeweils einander gegenüberliegenden Vierecksseiten wird so veranschaulicht.





- **Briefmarken zu Pythagoras**



Nicaragua (1971), Süd-Korea (2014),
Griechenland (1955), Surinam (1972),
San Marino (1983), Vatikan (1986), Sierra Leone (1983),
Makedonien (1998), Philippinen (2001), Japan (1984)

